

Modelos matemáticos y epidemiológicos de difusión de ratas y las enfermedades que transmiten

Por Juan Fernando Ospina

La abundancia de espacios y residuos presentes en quebradas, alcantarillas y sitios de disposición de desechos en áreas urbanas y periurbanas, genera un excelente hábitat para organismos sociales con gran capacidad de supervivencia y altas tasas de reproducción. Las ratas tienen estas cualidades y por ello son habitantes usuales de las ciudades, en tales cantidades que llegan a superar en número a las personas. Estos inteligentes animales del orden *Rodentia* consumen ingentes cantidades de residuos depositados en las cañerías, contribuyendo así con la preservación de estas estructuras de conducción de fluidos y con la reducción de gases como el metano, generados en el proceso de descomposición de la materia orgánica que allí acontece. Es de tal magnitud el consumo de materiales que efectúan estos detestados mamíferos, que se ha popularizado la afirmación de que si no fuera por las ratas, la ciudad volaría en mil pedazos. Desafortunadamente, las ratas también son consideradas como animales perjudiciales debido a que pueden transmitir y de hecho han transmitido, numerosos agentes causantes de enfermedades mortales contagiosas.

Los principales roedores asociados a los sitios de disposición de residuos sólidos en la región pertenecen a la familia *Muridae*: *Rattus norvegicus*, *Rattus rattus* y *Mus musculus*. Las ratas, además de difundirse y reproducirse, llevan consigo fluidos de pulgas, emiten orina y heces en el hábitat y pueden morder personas y animales. Algunas enfermedades transmitidas son las siguientes:

1- **Tifus exantemático endémico**: El agente causal es *Rickettsia Mooseri* transmitido por las pulgas *Xenopsilla cheopis*, cuyo reservorio son las ratas y ratones.

2- **Peste bubónica**: Es una zoonosis especialmente de roedores y alcanza a veces a los seres humanos. El bacilo que le causa es *Yersinia pestis*, transmitido por la pulga *Xenopsilla cheopis*.

3- **Leptospirosis**: El agente causal de la enfermedad es la *Leptospirosis* junto con los Serotipos *Canicola*, *Icterohemorrágico* y *pomona*. 4- **Hantavirus**, transmitidos por la orina de perros, vacas, y especialmente ratas. El reservorio es un roedor de campo de la subespecie *Sigmodontinae*. La mayoría de los perros con dueños responsables están vacunados; lo recomendable es que la vacunación de los caninos se realice desde los 45 días de edad. En el caso de las vacas es más difícil el control, ya que en años son muy pocos los casos registrados por la medicina veterinaria. A través de la orina y durante mucho tiempo, los animales enfermos eliminan los agentes de la enfermedad.

5- **Fiebre por mordeduras de ratas**.

6- **Fiebre de Haverhill**, producida por un bacilo que se encuentra en la boca de las ratas, el *Streptobacillus moniliformis*.

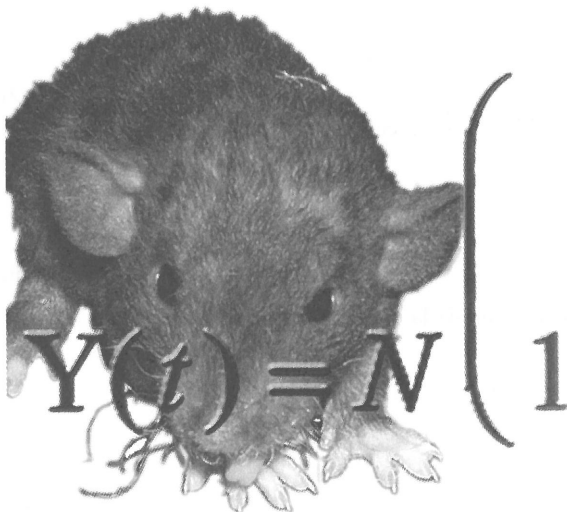
7- El **Sodoku** producido por el *Spirillum minus*.

8- La **Rabia** es transmitida al ser humano por mordeduras de ratones infectados.

El objetivo de éste trabajo es presentar modelos matemáticos para la propagación de ratas desde un foco inicial de infestación y para la epidemiología de enfermedades transmitidas directa o indirectamente por ellas. El modelo utilizado es simplemente la ecuación de transporte con difusión-convección-reproducción que tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) + v \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) + a u(x, t) \quad (1)$$

D es la constante de difusión para las ratas, v es la constante de convección y a es el ritmo de reproducción de las ratas. Aquí $u(x, t)$ representa la densidad de ratas en el sitio del hábitat denotado x , en el tiempo denotado t . El hábitat es asumido unidimensional e infinito y se extiende desde $-\infty$ hasta ∞ .



La distribución inicial de las ratas es asumida como de foco puntual de infestación ubicado justo en el centro del hábitat y se representa así:

$$u(x, 0) = \delta(x) \quad (2)$$

Donde $\delta(x)$ simboliza la función delta de Dirac, utilizada para representar fuentes puntuales de infestación. La solución de la ecuación (1) sometida a la condición (2) nos proporciona el perfil de infestación en el hábitat en cada instante del tiempo.

Entonces, algunos modelo matemáticos relativamente simples para la epidemiología de las enfermedades transmitidas por ratas pueden formularse como sigue. Se distinguen dos etapas de transmisión: una etapa es entre las ratas mismas (zoonosis, epizootia) y otra es desde la ratas hacia los humanos u otros animales susceptibles (epidemia). Esta última etapa de transmisión de enfermedades puede presentarse en las siguientes formas: Mordedura directa de rata; contacto – ingestión de orina o heces de rata; picadura de pulga portada por rata.

Se define la fuerza de la infección o fuerza de la morbimortalidad para enfermedades transmitidas por ratas en la siguiente forma:

$$\lambda(x, t) = u(x, t) (q(x) + p) \quad (3)$$

Donde $\lambda(x, t)$ representa la fuerza de infección en el tiempo t en un sitio x del habitat con infestación $u(x,t)$, una carga $q(x)$ de orina-heces por rata y un contenido de pulgas de p por cada rata. Se asume que todas las epizootias en ratas son completas, es decir, que todas las ratas están siempre infectadas y que sus volúmenes de deyección y contenido de pulgas son los mismos para todas las especies de ratas.

La fuerza de infección total para todo el hábitat es

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x, t) dx \quad (4)$$

Con ello se puede formular un modelo epidémico simple, tipo susceptible-infectado, obviamente asumiendo que las enfermedades consideradas no se transmiten de persona a persona. El modo es el siguiente: supongamos que se tiene una comunidad de N humanos susceptibles a la fuerza de la infección por ratas y que inicialmente, en un tiempo $t=0$, no hay ningún humano infectado de enfermedades transmitidas por ellas. En cada instante del tiempo clasificamos la comunidad en susceptibles e infectados. El número de susceptibles en el tiempo t es denotado $X(t)$ y el número de infectados en ese tiempo es $Y(t)$. Se asume que en todo tiempo $X(t) + Y(t) = N$. La condición inicial es entonces $X(0) = N$ y $Y(0) = 0$. La ecuación que determina la evolución en el tiempo del número de infectados es:

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \lambda(t) (N - Y(t)) \quad (5)$$

La solución es:

$$Y(t) = N \left(1 - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} \right) \quad (6)$$

Tal solución muestra que pasado un tiempo literalmente infinito o muy largo, todos los susceptibles terminan infectados y la epidemia igual que la epizootia es completa. Este resultado es para el caso en el cual no se toma ninguna medida preventiva para impedir la transmisión desde las ratas a los humanos.

En el caso en que sí se tomen medidas preventivas tipo vacunación, inmunización o cualquier otra alternativa incluidas las educacionales y culturales, se hace necesario construir un modelo más complejo como el siguiente: Se clasifica la población en tres categorías: susceptible, advertido e infectado. Por advertido se considera un humano que puede tomar medidas de prevención en su cotidianidad, para no entrar directamente en contacto con ratas ni ingerir sus orina-heces. Se asume que los susceptibles son convertidos en advertidos a un ritmo *per cápita* denotado γ que mide la eficacia de la campaña educacional preventiva. Se denotan los números de susceptibles, infectados y advertidos en el tiempo t por $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$ respectivamente. Para todo tiempo se tiene que $X(t) + Y(t) + Z(t) = N$. Las condiciones iniciales son $X(0) = N$, $Y(0) = 0$ y $Z(0) = 0$. Las ecuaciones que rigen la evolución temporal de $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$ son las siguientes:

$$\frac{d}{dt} X(t) = -\lambda(t) X(t) - \gamma X(t) \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \lambda(t) X(t) \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \gamma X(t) \quad (9)$$

La solución de la ecuación para $X(t)$ es:

$$X(t) = N e^{-\left(\int_0^t \lambda(s) ds - \gamma t \right)} \quad (10)$$

La solución de la ecuación para $Y(t)$ es :

$$Y(t) = \int_0^t \lambda(\tau) e^{-\left(\int_0^\tau \lambda(s) ds - \gamma \tau \right)} d\tau \quad (11)$$

Y la solución para $Z(t)$ es:

$$Z(t) = \gamma N \int_0^t e^{\left(-\int_0^\tau \lambda(s) ds - \gamma \tau\right)} d\tau \quad (12)$$

Se observa que aún en el caso de contar con medidas preventivas, se tiene que $X(\infty) = 0$, pero ahora a diferencia del caso sin prevención, $Y(\infty) < N$ y $Z(\infty) > 0$. Es decir, ahora la epidemia no es completa y no todos los susceptibles irremediamente terminan infectados, sino que un cierto número de ellos, nominalmente $Z(\infty)$



quedan efectivamente inmunizados y protegidos de la infección. La severidad de la epidemia padecida se define como la proporción de infectados respecto del número inicial de susceptibles, N , es decir:

$$\text{Severidad} = \frac{Y(\infty)}{N} \quad (13)$$

La eficiencia de la campaña preventiva se define como la proporción de advertidos respecto del número inicial de susceptibles, o sea:

$$\text{Eficiencia} = \frac{Z(\infty)}{N} \quad (14)$$

En resumen, se ha presentado un modelo matemático para la transmisión de enfermedades portadas por ratas, desde un foco puntual inicial de infestación-infección alejado de una comunidad de humanos susceptibles que pueden ser advertidos de la amenaza de la fuerza de la infección y que pueden tomar medidas conscientes mínimas de prevención cotidiana.

* Investigador en ecoepidemiología y modelación. Integrante Grupo de Lógica y Computación Universidad EAFIT. Judoan@epm.net.co

GIEM

Proyectos de investigación básica y aplicada de una manera integral

Actividades de extensión a las comunidades

Perteneciente a la Corporación de Patologías Tropicales.

**Universidad de Antioquia / Bloque 2-230.
Teléfono 210 56 72**

PROMOVEMOS PARTICIPAMOS PROPONEMOS DEFENDEMOS FORTALECEMOS REPRESENTAMOS

EXISTIMOS COMO GREMIO, PARA PROMOVER Y FORTALECER A LAS ORGANIZACIONES DE DESARROLLO SOCIAL SIN ANIMO DE LUCRO, DEL DEPARTAMENTO DE ANTIOQUIA, CON EL FIN DE QUE CONTRIBUYAN, A LA CONSTRUCCION DE UNA SOCIEDAD MAS JUSTA Y EQUITATIVA.

Cr 49 No. 50-30, Ed Lucrecio Vélez Of. 702 / Tel 231 1320
E-mail: federacionong@epm.net.co

CORPORACIÓN Centro de Educación Ambiental

"Investigación y Educación para la Vida"

Organización ambiental con carácter interdisciplinario, que promueve el desarrollo social sostenible a través de procesos de investigación y educación para la gestión y la participación social con comunidades organizadas, entidades públicas y privadas del país.

Cr. 46 No. 49A-27 Of. 716 / Tel. 514 1062 / E-mail: corcea@geo.net.co